Analysis

Integration

Integration von ln - Funktionen

Mit Substitution und partieller Integration

Datei Nr. 46041

Stand 18. Mai 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Stoff-Verteilung zur Integration

Zu Logarithmusfunktionen gehören diese Texte: 46041 / 48015

Grundniveau - Gymnasium

Datei Nr. 48011 Teil 1	Einführung in die Grundlagen: Änderungen und Differenziale Lineare Änderungen / Nicht-lineare Änderungen Lineare Änderungen auf der Tangente - Differenzialbegriff Das unbestimmte Integral – Stammfunktionen - Grundintegral 1
Datei Nr. 48012 Teil 2:	Integrationsregeln Unbestimmte Integrale für ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen mit vielen Substitutionsarten. Umfangreiches Übungsmaterial
Datei Nr. 48013 Teil 3	Das bestimmte Integral für Potenzfunktionen, ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen, auch mit Substitution.
Datei Nr. 48014 Teil 4	Integration von Wurzelfunktionen (1)
Datei Nr. 48030	Grundniveau für einfache Anforderungen: Gemischtes Trainingsheft Gründlichen Wiederholen und Trainieren: Potenzfunktionen, Rationale Funktionen, Wurzel-, Exponential- und Trigonometrische Funktionen.
Datei Nr. 48015 Teil 5	Partielle Integration: alles
Datei Nr. 45041 Teil 6	Exponentialfunktionen alles
Datei Nr. 46041 Teil 7	Ln-Funktionen alles
Datei Nr. 48016 Teil 8	Trigonometrische Funktionen alles
Datei Nr. 48040	Lernblatt: Die wichtigsten Integrale

Höheres Niveau (Studium)

	Gebrochen rationalen Funktionen:
Datei Nr. 48050	Integrationsmethoden - Übersicht
Datei Nr. 48051	Integration mit Partialbruchzerlegung
Datei Nr. 48052	Reduktionsformel bzw. Umgekehrte partielle Integration
Datei Nr. 48055	Integration mit arctan-Funktionen
Datei Nr. 48060	Sammlung schwerer Integrale
Datei Nr. 48056	Integration von Wurzelfunktionen (2) mit arcsin-Funktionen
Datei Nr. 48070	Integration von Wurzelfunktionen (3): Substitutionen mit sin und sinh
Datei Nr. 48057	Integration der Arkusfunktionen
Datei Nr. 48061	Schwierige Integrale Aufgabensammlung

Inhalt

Wichtiges Vorwort

Die Integration von Logarithmusfunktionen gehört mit zum Schwersten in der Integralrechnung. Die Funktionsterme sind oftmals so kompliziert, dass man sie erst so umformen muss, dass eine Funktion entsteht, deren Stammfunktion man bilden kann. Bei diesen Umformungen kommen neben den Logarithmengesetzen die Methoden der Substitution und der partiellen Integration zum Einsatz.

Daher verschwinden diese Integrale neuerdings immer mehr aus dem Unterricht und aus der Abiturprüfung. Der Einzug der leistungsfähigen Rechner (CAS-Rechner und Grafikrechner) berechnen diese Integrale mühelos und schaffen so Platz in der Prüfung für Denkaufgaben.

Man beachte jedoch, dass die meisten Hochschulen die Fähigkeit von den Studenten verlangen, dass sie diese Aufgaben ohne Verwendung dieser Hilfsmittel lösen können!

Wer sich also hier beschäftigen will, könnte auf Schwierigkeiten stoßen. Ich habe die Lösungen zwar ausführlich gehalten, aber dennoch sind sie oft schwer zu verstehen, wenn man nicht Routine dabei hat. Zu vieles greift hier ineinander.

Man achte auch darauf, dass ln x eigentlich ln(x) heißt. Denn $\ln x - 4$ ist nämlich $\ln(x) - 4$ und nicht $\ln(x-4)$.

1. Eine Stammfunktion zu f(x) = ln x

Da die Berechnung der Stammfunktion von $f(x) = \ln x$ nur mit einer sehr anspruchsvollen Methode zu erreichen ist, gehen wir den umgekehrten Weg:
Man kann durch Ableiten schnell beweisen, dass gilt

$F(x) = x \ln x - x + C$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = \ln x$.

denn: $F'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

Daher merken wir uns als weiteres Grundintegral das unbestimmte Integral:

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + C$$

bzw. das bestimmte Integral:

$$\int_a^b \ln x \, dx = \left[x \cdot \ln x - x \right]_a^b$$

In Abschnitt 5 werden wir diese Formel durch partielle Integration herleiten.

2 Integration mit einfacher Substitution oder mit der Kettenregel

(1a) $\boxed{\int_{-1}^{1} \ln(2-x)\,dx}$

Lösung mit der Kettenregel-Umkehrung:

Ausgehend von der Grundregel $\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - x + C$ und der Erkenntnis, dass bei vorliegender Funktion eine Verkettung vorliegt, geht man so vor:

$$\int_{-1}^{2} \ln(2-x)\,dx = \left[\frac{(2-x)\cdot\ln(2-x)-(2-x)}{-1}\right]_{-1}^{1} = -\left[1\cdot\ln(1)-1\right]+\left[3\cdot\ln(3)-3\right] = 3\cdot\ln(3)-2$$

Es wurde also zusätzlich durch die innere Ableitung (-1) dividiert.

Lösung mit Substitution

Wir ersetzen (2-x) durch eine neue Variable, wodurch die zum Integrieren einfachere Funktion ln u entsteht. Dazu muss alles auf die neue Variable umgerechnet werden:

Substitution: $u = 2 - x$, dann wird $du = -\,dx$, also $dx = -\,du$

Umrechnung der Grenzen: $x_1 = -1 \Rightarrow u_1 = 2-(-1) = 3$, $x_2 = 1 \Rightarrow u_2 = 2-1 = 1$.

$$= -\int_{3}^{1} \ln u\,du = \left[u\cdot\ln u - u\right]_1^3 = \left[3\cdot\ln 3 - 3\right]-\left[1\cdot\ln 1 - 1\right] = 3\ln 3 - 2 = \ln 27 - 2 \approx 1{,}30$$

Erklärung: Durch Vertauschung der Grenzen ändert sich das Vorzeichen, so dass das Minuszeichen wieder verschwindet. Weiter ist ln 1 = 0 und 3 ln 3 = ln 3^3 = ln 27.

(1b) $\boxed{\int_{-3}^{9} \ln(x+4)\,dx}$

Lösung mit der Kettenregel-Umkehrung:

Weil hier die innere Ableitung 1 ist, reicht die Anwendung des Grundintegrals:

$$\int_{-3}^{9} \ln(x+4)\,dx = \left[(x+4)\cdot\ln(x+4)-(x+4)\right]_{-3}^{9} = \left[13\cdot\ln(13)-13\right]-\left[1\cdot\ln(1)-1\right] = 13\cdot\ln(13)-12$$

Lösung mit Substitution

Substitution: $u = x+4 \Rightarrow du = 1\cdot dx = dx$

$x_1 = -3 \Rightarrow u_1 = 1$ und $x_2 = 9 \Rightarrow u_2 = 13$

$$= \int_{1}^{13} \ln u\,du = \left[u\cdot\ln u - u\right]_1^{13} = \left[13\cdot\ln 13 - 13\right]-\left[1\cdot\ln 1 - 1\right] = 13\cdot\ln 13 - 12 \approx 21{,}34$$

denn ln 1 = 0.

(2) $\boxed{\int_{-2}^{1}\left(x-2\cdot\ln(x+3)\right)dx}$ Zerlegung in zwei Integrale: $\int_{-2}^{1} x\,dx-2\int_{-2}^{1}\ln(x+3)\,dx$

Lösung ohne Substitution:

$$\int_{-2}^{1} x\,dx-2\int_{-2}^{1}\ln(x+3)\,dx=\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{1}-2\left[(x+3)\cdot\ln(x+3)-(x+3)\right]_{-2}^{1}$$

$$=\tfrac{1}{2}-2-2\cdot\left[4\cdot\ln(4)-4\right]+2\cdot\left[1\cdot\ln(1)-1\right]=-\tfrac{3}{2}-8\cdot\ln(4)+8-2=-8\cdot\ln(4)+\tfrac{9}{2}$$

Lösung mit Substitution: u = x + 3, du = dx also dx = du.
Grenzen: $x=-2\ \to\ u=1,\quad x=1\ \to\ u=4$

$$=\int_{-2}^{1} x\,dx-2\int_{1}^{4}\ln u\,du=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{1}-2\left[u\cdot\ln u-u\right]_{1}^{4}=\frac{1}{2}-2-2(4\ln 4-4)+2(0-1)$$

$$=\frac{1}{2}-2-8\cdot\ln 4+8-2=\frac{9}{2}-8\cdot\ln 4$$

(3) $\boxed{\int_{0}^{2} 2\cdot\ln\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)dx}$

Lösung ohne Substitution:

Die innere Ableitung ist $\tfrac{1}{2}$. Durch sie muss man im Grundintegral teilen:

$$2\int_{0}^{2}\ln\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)dx=2\cdot\left[\frac{\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)\cdot\ln\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)-\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)}{\tfrac{1}{2}}\right]_{0}^{2}=4\left[\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)\cdot\ln\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)-\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)\right]_{0}^{2}$$

$$=4\cdot\left(2\cdot\ln(2)-2\right)-4\cdot\left[1\cdot\ln(1)-1\right]=8\cdot\ln(2)-4$$

Lösung mit Substitution: $u=\tfrac{1}{2}x+1\ \Rightarrow\ du=\frac{1}{2}dx\ \Rightarrow\ 2dx=4du$
Grenzen: $x=0\ \to\ u=1,\quad x=2\ \to\ u=2$

$$=4\int_{1}^{2}\ln u\,du=4\left[u\cdot\ln u-u\right]_{1}^{2}=4\left[2\ln 2-2\right]-4\left[0-1\right]=8\ln 2-4\approx 1{,}55$$

3 Integration mit erweiterter Substitution

Wenn das Argument der ln-Funktion nicht linear ist, kann man nicht wie im Abschnitt 2 vorgehen.
Eine Division durch die innere Ableitung wird hier falsch.

(4) $\boxed{\int_3^5 x \cdot \ln\left(x^2-4\right)dx}$ Substitution: $u = x^2 - 4$ d.h. $du = 2x \cdot dx$ also $xdx = \frac{1}{2}du$

$$= \int_5^{21} \tfrac{1}{2} \cdot \ln u\, dx = \tfrac{1}{2}\left[u \cdot \ln u - u\right]_5^{21} = \tfrac{1}{2}\left[21 \cdot \ln 21 - 21\right] - \tfrac{1}{2}\left[5 \cdot \ln 5 - 5\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(21 \cdot \ln 21 - 5 \cdot \ln 5 - 16\right) \approx 19{,}94$$

Für die Anwendung dieser Substitution gibt es ein Merkmal:

<u>Vor</u> dem Logarithmus steht ein Vielfaches der Ableitung des Arguments (x^2- 4) als Faktor. Daher gelingt es, den Faktor x zusammen mit dx in du verschwinden zu lassen. Man nennt dies auch ein „<u>Schlupfintegral</u>“.

Usw.